

Θεωρία Υλικών,  
Εξέταση Προόδου της 20/11/2012

**Θέμα 1** (1.0+1.0+1.0+1.0=4.0)

Σωματίο το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται από  $x = 0$  έως  $x = L$  έχει κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right),$$

όπου  $A$  κατάλληλη θετική πραγματική σταθερά.

(α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση μετά από χρόνο  $t$ .

(β) Βρείτε την μέση τιμή και αβεβαιότητα της ενέργειας σε χρόνο  $t$ .

(γ) Βρείτε την μέση θέση σε χρόνο  $t$ .

(δ) Στο (γ) θα έπρεπε να βρείτε ότι η μέση θέση δεν αλλάζει με τον χρόνο. Σχολιάστε το θεώρημα του Ehrenfest.

Υπόδειξη: (α)  $\sin x \cos y = \frac{1}{2} \sin(x+y) + \frac{1}{2} \sin(x-y)$  και (β)  $\int_0^\pi x \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$

**Θέμα 2** (1.5) Αποδείξτε ότι για τρεις τυχόντες τελεστές  $A, B, C$  ισχύει

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

**Θέμα 3** (0.5+1.0+1.0+1.0=3.5)

Σωματίδιο κινείται σε τρεις διαστάσεις με κυματοσυνάρτηση (για  $\hbar = 1$  και  $m = 1$ ):

$$\psi(x, y, z) = A x e^{-(x^2+y^2+z^2)/2}$$

Υπολογίστε την θετική πραγματική σταθερά  $A$ . Υπολογίστε την μέση τιμή και αβεβαιότητα (α) της θέσης  $x$  (β) της ορμής  $p_y$  (γ) της στροφορμής  $l_z$ .

Υπόδειξη:  $\int_0^\infty x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{(2k)!}{2^{2k+1} k!} \sqrt{\pi}$ .

**Θέμα 4** (0.5+0.5+1.0)

(α) Υπολογίστε την ακτινική πυκνότητα πιθανότητας,

$$p(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\psi(r, \theta, \phi)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

για την κατάσταση  $n = 2, l = 1, m = 1$  του υδρογόνου.

(β) Βρείτε σε ποια απόσταση η  $p(r)$  γίνεται μέγιστη.

(γ) Βρείτε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της απόστασης  $r$ .

Υπόδειξη:  $\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}$ .