

# Θεωρητική Επιστήμη Υλικών

Διαγώνισμα Προόδου

16/11/2010

**Θέμα 1** Κάποιο σωματιδίο βρίσκεται στη θεμελιώδη σταθμη του, κοντά στο ελάχιστο της δυναμικής του ενέργειας. Μετράται ότι  $\Delta x = 1 \text{ \AA}$ . Πόση ενέργεια πρέπει να του δοθεί για να διεγερθεί; (Υπόδειξη: αφού πρώτα το δικαιολογήσετε, πάρτε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή).

**Θέμα 2** Σωματιδίο σε αρμονικό ταλαντωτή περιγράφεται τη στιγμή  $t = 0$  από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = N(1 - 2x)e^{-x^2/2},$$

στο σύστημα μονάδων  $\hbar = m = \omega = 1$ .  $N$  είναι κατάλληλη σταθερά ώστε η  $\psi$  να είναι κανονικοποιημένη.

(α) Δείξτε ότι η  $\psi$  σχετίζεται με τις ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος με την

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1.$$

(β) Υπολογίστε την αβεβαιότητα θέσης σαν συνάρτηση του χρόνου.

**Θέμα 3** (α) Αποδειξτε γενικά ότι για δυο τυχούσες κβαντικές καταστάσεις ισχύει

$$\text{Tr}(|a\rangle\langle b|) = \langle b|a\rangle.$$

(δείτε και την υπόδειξη στο επόμενο θέμα).

(β) Υπολογίστε το δεξί και αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης για δυο (μη τετριμένα) τριδιάστατα διανύσματα της επιλογής σας.

**Θέμα 4** Ο πίνακας πυκνότητας (density matrix) δίνεται από την

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

όπου  $|\psi\rangle$  το κανονικοποιημένο ket του συστήματος. Αποδειξτε τις παρακάτω ιδιότητες του  $\rho$ :

(α)  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

(β) Για τυχόντα τελεστη  $A$  είναι  $\langle A \rangle = \text{Tr}(A\rho) = \text{Tr}(\rho A)$ .

(γ)  $\rho^2 = \rho$ .

(δ)  $i\hbar \frac{d\rho}{dt} = [H, \rho]$ .

(ε) Για τυχούσα κατάσταση  $|\chi\rangle$  είναι  $0 \leq \langle \chi | \rho | \chi \rangle \leq 1$ .

(Υπόδειξη: Το ίχνος είναι ανεξάρτητο από την επιλογή βάσης. Είναι  $\text{Tr}(A) = \sum_n \langle n | A | n \rangle$ ,

αρκεί να ισχυρι η σχέση πληροτητας  $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ .