Θεωρητική Επιστήμη Υλικών

Διαγώνισμα Προόδου

16/11/2010

Θέμα 1 Κάποιο σωματιδιο βρισκεται στη θεμελιώδη σταθμη του, κοντά στο ελάχιστο της δυναμικής του ενέργειας. Μετράται ότι Δx=1 Å. Πόση ενέργεια πρέπει να του δοθεί για να διεγερθεί; (Υπόδειξη: αφού πρώτα το δικαιολογησετε, πάρτε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή).

Θέμα 2 Σωματιδιο σε αρμονικό ταλαντωτή περιγραφεται τη στιγμή $t = 0$ από την κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = N(1-2x)e^{-x^2/2},$$

στο σύστημα μονάδων $\hbar = m = \omega = 1$. N είναι κατάλληλη σταθερά ώστε η ψ να είναι κανονικοποιημένη.

(α) Δείξτε ότι η ψ σχετίζεται με τις ιδιοσυναρτήσεις του συστήματος με την

$$\psi = \sqrt{\frac{1}{3}}\psi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\psi_1.$$

(β) Υπολογιστε την αβεβαιότητα θέσης σαν συνάρτηση του χρονου.

Θέμα 3 (α) Αποδειξτε γενικά ότι για δυο τυχούσες κβαντικές καταστάσεις ισχύει

$$\mathrm{Tr}(|a\rangle\langle b|) = \langle b|a\rangle.$$

(δείτε και την υπόδειξη στο επόμενο θέμα).

(β) Υπολογίστε το δεξί και αριστερο μέλος της παραπάνω σχέσης για δυο (μη τετριμένα) τριδιάστατα διανύσματα της επιλογής σας.

Θέμα 4 Ο πίνακας πυκνότητας (density matrix) δίνεται από την

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|,$$

όπου $|\psi\rangle$ το κανονικοποιημένο ket του συστήματος. Αποδειξτε τις παρακάτω ιδιότητες του ρ:

(α) $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

(β) Για τυχόντα τελεστη A είναι $\langle A\rangle = \mathrm{Tr}(A\rho) = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

(γ) $\rho^2 = \rho$.

(δ) $i\hbar\dfrac{d\rho}{dt} = [H, \rho]$.

(ε) Για τυχούσα κατάσταση $|\chi\rangle$ είναι $0 \leq \langle\chi|\rho|\chi\rangle \leq 1$.

(*Υπόδειξη: Το ίχνος ειναι ανεξάρτητο από την επιλογή βάσης. Είναι* $\mathrm{Tr}(A) = \sum_n \langle n|A|n\rangle$, *αρκεί να ισχυει η σχέση πληροτητας* $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$.

Θεωρητική Επιστήμη Υλικών

21 Νοεμβρίου 2011

Λύστε οποιαδήποτε 4 θέματα.

Θέμα 1. (α) Δείξτε ότι η παρακάτω συνάρτηση αντιστοιχεί σε ιδιοκατάσταση του αρμονικού ταλαντωτή ($m = \hbar = \omega = 1$) και βρείτε την αντίστοιχη ιδιοτιμή της Χαμιλτωνιανής:

$$\psi = (2x^3 - 3x)e^{-x^2/2}$$

(β) Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις που έχουν την αμέσως μικρότερη και αμέσως μεγαλύτερη ιδιοτιμή (μην κάνετε κανονικοποίηση).

Θέμα 2. Η Χαμιλτωνιανή. $\mathcal{H}_0$, σε κάποιο κβαντικό σύστημα έχει δυο ιδιοκαταστάσεις, την $|1\rangle$ και την $|2\rangle$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $\epsilon_1 = 0$ και $\epsilon_2 = \hbar\omega_0$. Για $t = 0$ το σύστημα είναι στην $|1\rangle$, και αρχίζει να αλληλεπιδρά με εξωτερικό πεδίο $\mathcal{V}$ για το οποίο δίνεται ότι $\langle 1|\mathcal{V}|1\rangle = \langle 2|\mathcal{V}|2\rangle = 0$ και $\langle 1|\mathcal{V}|2\rangle = \hbar\omega_1$. Η χαμιλτωνιανή είναι δηλαδή $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{V}$.

(α) Γράψτε τους 2×2 πίνακες που αναπαριστούν τους $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{V}$. Βρείτε τις ιδοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της $\mathcal{H}$.

(β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα ο σύστημα να βρεθεί πάλι στην $|1\rangle$ μετά από χρόνο t.

Θέμα 3. Δυο ηλεκτρόνια βρίσκονται στην ίδια κατάσταση, $\psi_a(\mathbf{r})$ με αντιπαράλληλα σπιν και ολική κυματοσυνάρτηση $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Η πυκνότητα ορίζεται ως

$$n(\mathbf{r}) = \int |\psi(\mathbf{r}, \mathbf{r}_2)|^2 d^3r_2 = \int |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})|^2 d^3r_1.$$

(α) Εξηγήστε την δευτερη ισότητα στην παραπάνω σχέση. Αποδειξτε ότι

$$n(\mathbf{r}) = 2|\psi_a(\mathbf{r})|^2$$

(β) Έστω ότι τα δυο ηλεκτρονια έλκονται από πυρήνα με δυναμικό $V(\mathbf{r})$. Αποδειξτε ότι η μέση δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι

$$\langle V \rangle = \int n(\mathbf{r})V(\mathbf{r})d^3r.$$

(γ) Υπολογίστε την μέση δυναμική ενέργεια $\langle V \rangle$ στο He στην θεμελιώδη στάθμη, $1s^2$.

Θέμα 4. (α) Υπολογίστε το $\langle l_z \rangle$ στο Υδρογόνο όταν

$$\psi = N(\psi_{100} + i\sqrt{2}\psi_{211} + \psi_{332}).$$

(β) Σωμάτιο με σπιν 1/2 βρίσκεται στην κατάσταση $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle + \beta|-\rangle$. Υπολογίστε την μέση τιμή του διανύσματος του σπιν, $\langle \mathbf{s} \rangle$, και του μέτρου του, $\langle s^2 \rangle$.

Θέμα 5. Η κατάσταση σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι περιγράφεται από την

$$\psi(x) = N \sin^3 \frac{\pi x}{L}.$$

(α) Μετράμε την ενέργεια του σωματιδίου. Ποια είναι τα δυνατά αποτελέσματα και με ποιες πιθανότητες; Ποια η μέση τιμή και η αβεβαιότητα των μετρήσεων σε eV για $L = 1$ nm; Δίνεται ότι $a_B = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.5$ Å, και $E_0 = \dfrac{\hbar^2}{2ma_B^2} = 27$ eV.

(β) Έστω ότι η μέτρηση έδωσε την χαμηλότερη δυνατή τιμή. Αμέσως μετά, μετράμε την θέση του σωματιδίου. Ποια η πιθανότητα να βρούμε το σωματίδιο σε θέσεις από $\dfrac{2L}{5}$ έως $\dfrac{3L}{5}$;

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $e^{ia} = \cos a + i \sin a$ για να εκφράσετε την $\psi(x)$ σαν γραμμικό συνδυασμό ιδιοσυναρτήσεων.

Λύστε οποιαδήποτε 4 θέματα.

Θεωρία Υλικών,
Εξέταση Προόδου της 20/11/2012

Θέμα 1 (1.0+1.0+1.0+1.0=4.0)

Σωμάτιο το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται από $x = 0$ έως $x = L$ έχει κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = A\sin(\frac{\pi x}{L})\cos(\frac{2\pi x}{L}),$$

όπου A κατάλληλη θετική πραγματική σταθερά.

(α) Βρείτε την κυματοσυνάρτηση μετά από χρόνο t.

(β) Βρείτε την μέση τιμή και αβεβαιότητα της ενέργειας σε χρόνο t.

(γ) Βρείτε την μέση θέση σε χρόνο t.

(δ) Στο (γ) θα έπρεπε να βρείτε ότι η μέση θέση δεν αλλάζει με τον χρόνο. Σχολιάστε το θεώρημα του Ehrenfest.

Υπόδειξη: (α) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y) + \frac{1}{2}\sin(x-y)$ και (β) $\int_0^\pi x\sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{4}$

Θέμα 2 (1.5) Αποδείξτε ότι για τρεις τυχόντες τελεστές A, B, C ισχύει

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Θέμα 3 (0.5+1.0+1.0+1.0=3.5)

Σωματίδιο κινείται σε τρεις διαστάσεις με κυματοσυνάρτηση (για $\hbar = 1$ και $m = 1$):

$$\psi(x,y,z) = Axe^{-(x^2+y^2+z^2)/2}$$

.

Υπολογίστε την θετική πραγματική σταθερά A. Υπολογίστε την μέση τιμή και αβεβαιότητα (α) της θέσης x (β) της ορμής p_y (γ) της στροφορμής l_z.

Υπόδειξη: $\int_0^\infty x^{2k}e^{-x^2}dx = \frac{(2k)!}{2^{2k+1}k!}\sqrt{\pi}.$

Θέμα 4 (0.5+0.5+1.0)

(α) Υπολογίστε την ακτινική πυκνότητα πιθανότητας,

$$p(r) = \int_0^{2\pi}\int_0^\pi |\psi(r,\theta,\phi)|^2 r^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

για την κατάσταση $n = 2, l = 1, m = 1$ του υδρογόνου.

(β) Βρείτε σε ποια απόσταση η $p(r)$ γίνεται μέγιστη.

(γ) Βρείτε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα της απόστασης r.

Υπόδειξη: $\int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{3}.$

ΘΕΩΡΙΑ ΥΛΙΚΩΝ, ΠΡΟΟΔΟΣ 20/11/12

$\boxed{Θ1}$ (α) $\psi(x) = A\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{2\pi x}{L} = -\frac{A}{2}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{A}{2}\sin\frac{3\pi x}{L}$

$= -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{3\pi x}{L} = -\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\,\psi_1 + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{2}}\,\psi_3$

$\int|\psi(x)|^2dx = 1 \Rightarrow 2\left(\frac{A}{2}\frac{L}{2}\right)^2 = 1 \Rightarrow A = 2/\sqrt{L} \Rightarrow \psi(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x)$

$\Rightarrow \psi(x,t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-i\omega_1 t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x)e^{-i\omega_3 t}$ $\omega_1 = \frac{E_1}{\hbar},\ E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2},\ \omega_3 = 9\omega_1.$

(β) $\frac{d\langle E^n\rangle}{dt} \sim \langle[H^n,H]\rangle = 0$ άρα $\langle E\rangle, \Delta E$ ανεξ. του t.

$\langle E\rangle = |c_1|^2E_1 + |c_3|^2E_3 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_3 = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}9E_1 = 5E_1$

$\langle E^2\rangle = |c_1|^2E_1^2 + |c_3|^2E_3^2 = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}E_3^2 = \frac{1}{2}E_1^2 + \frac{1}{2}81E_1^2 = 41E_1^2$

$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} = \sqrt{41-25}\,E_1 = 4E_1$

(γ) $\langle x\rangle = \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\int|\psi_1|^2x\,dx + \frac{1}{2}\int|\psi_3|^2x\,dx$

$-\frac{1}{2}e^{-i(\omega_1-\omega_3)}\int\psi_1(x)x\psi_3(x)dx - \frac{1}{2}e^{-i(\omega_3-\omega_1)}\int\psi_1(x)x\psi_3(x)dx$

Από συμμετρία: τα δυο πρώτα $= L/2$ αφού $|\psi_n|^2$ άρτια $\forall n$
ενώ τα δυο τελευταία $= 0$ αφού $\psi_1 x\psi_3$ = περιττή.

Άρα $\langle x\rangle = L/2$

(δ) Εν αντιθέσει με το (β), τώρα $\langle[x,H]\rangle = 0$ όχι επειδή $[x,H]=0$
αλλά γιατί $[x,H] = i\hbar\frac{\partial H}{\partial p} = i\hbar\frac{p}{m} \Rightarrow \langle\dot{x}\rangle = \frac{\langle p\rangle}{m}$ και $\langle p\rangle = 0$
σε άρτιες καταστάσεις. Οι ψ_1, ψ_3 είναι άρτιες, άρα και η $\psi(x,t)$.

$\boxed{Θ2}$ (λύση Χ. Μαβίδη)

$[A,[B,C]] = [A,BC-CB] = [A,BC] - [A,CB] = B[A,C] - [A,B]C - C[A,B] - [A,C]B$

$= [B,[A,C]] - [C,[A,B]] = -[B,[A,C]] - [C,[A,B]]$.

$\boxed{Θ3}$ $\int|\psi|^2dV = 1 \Rightarrow A^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz = 1$

$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx = 2\int_0^{\infty}f(x)dx\right.$ αν $\left.f(-x) = f(x)\right) \Rightarrow$

$8A^2\int_0^\infty x^2e^{-x^2}dx\int_0^\infty e^{-y^2}dy\int_0^\infty e^{-z^2}dz = 1 \Rightarrow 8A^2\frac{\sqrt{\pi}}{4}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow A = \frac{2^{1/2}}{\pi^{3/4}}$

(α) $\langle x\rangle = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^3e^{-(x^2+y^2+z^2)}dx\,dy\,dz = 0$ (περιττή)

$\langle x^2\rangle = A^2\int_{-\infty}^{+\infty}x^4e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-z^2}dz = \frac{2}{(\sqrt{\pi})^3}\,\frac{3}{8}\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot 8 = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{3/2}$.

$\boxed{\Theta 3\ \text{συν}}$ $\langle p_y \rangle = \langle -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$ αφού ψ πραγμ.

$$\langle p_y^2 \rangle = A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{d^2}{dy^2} e^{-y^2}\right) dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{\pi})^3}\, 2\frac{\sqrt{\pi}}{4} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{-y^2} dy \right\} 2\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \sqrt{\pi} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right\} = \frac{1}{2} \Rightarrow \Delta p_y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$l_z = x p_y - y p_x = -i x \frac{\partial}{\partial y} + i y \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow \langle l_z \rangle = 0$ αφού ψ πραγμ.

$$l_z \psi = \left(-i x (-y) \cancel{x} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} + i y (-x) x e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} + i y e^{-(x^2+y^2+z^2)/2}\right) A$$

$$= i y e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} A$$

$$l_z^2 \psi = \left(-i x \frac{\partial}{\partial y} + i y \frac{\partial}{\partial x}\right) i y e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} A = \left(x e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} - x y^2 e^{-(x^2+y^2+z^2)/2}\right.$$

$$\left. + y^2 x e^{-(x^2+y^2+z^2)/2}\right) A = A x e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} = \psi.$$

<u>ενδιαφέρον</u>: η ψ ιδιοκατάσταση του l_z^2 αλλά όχι του l_z!

(ισχύει και $\psi \sim p_x \to$ ιδιοκατ. του l_x και του $l^2 = l_x^2 + l_y^2 + l_z^2$).

άρα $\langle l_z^2 \rangle = 1 \Rightarrow \Delta l_z = 1$.

$\boxed{\Theta 4}$ Από τυπολόγιο ή δίνονται διαφορικά $\psi_{211} = -\frac{1}{8\sqrt{\pi}} r e^{-r/2} \sin\theta\, e^{i\varphi}$

$$P(r) = \frac{1}{64\pi} r^4 e^{-r} \int_0^{2\pi} |e^{i\varphi}|^2 d\varphi \int_0^{\pi} \sin^2\theta \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{64\pi} r^4 e^{-r}\, 2\pi \frac{4}{3}$$

$\Rightarrow P(r) = \frac{1}{24} r^4 e^{-r}$. Έλεγχος: $\int_0^\infty P(r) dr = \frac{1}{24} \int_0^\infty r^4 e^{-r} dr = 1$

αφού $\int_0^\infty r^n e^{-r} dr = n!$ και $4! = 24$.

$P'(r) = 0 \Rightarrow 4r^3 e^{-r} - r^4 e^{-r} = 0 \Rightarrow r = 4$.

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r P(r) dr = \frac{1}{24} \int_0^\infty r^5 P(r) dr = \frac{5!}{24} = \frac{120}{24} = 5$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 P(r) dr = \frac{1}{24} \int_0^\infty r^6 P(r) dr = \frac{6!}{24} = 30$$

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} = \sqrt{30 - 25} = \sqrt{5}.$$

Θεωρία Υλικών
Εξέταση Προόδου της 13/11/2013

Θέμα 1 (2.0)

Υπολογίστε τα στοιχεία $\langle 20|l_z|20\rangle$, $\langle 21|l_+|20\rangle$, $\langle 20|l_+l_-|20\rangle$, $\langle 20|l_-^2 l_z l_+^2|20\rangle$. Οι $|lm\rangle$ ειναι οι κοινές ιδιοκαταστάσεις των l^2 και l_z.

Θέμα 2 (2.0)

Μια προσέγγιση της περιστροφικής κίνησης του μορίου HI είναι να θεωρήσουμε ότι το H περιστρέφεται ελεύθερα στον χώρο γύρω από το ακίνητο I σε απόσταση d_0 =1.61Å. Η Χαμιλτωνιανή του προβλήματος ειναι

$$\mathcal{H} = \frac{l^2}{2m_p d_0^2}.$$

(α) Βρείτε τις τρεις χαμηλότερες ιδιοτιμές της σε eV.

(β) Δώστε την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης κατάστασης.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα του $\cos\theta = z/r$ στην θεμελιώδη στάθμη.

(δ) Αν το μόριο είναι στην θεμελιώδη κατάσταση, ποιο ειναι το μέγιστο μήκος κύματος φωτονίου που απαιτειται για να διεγερθεί;

Θέμα 3 (3.0)

Οι ταλαντωτικές κινήσεις του HI μπορούν να προσεγγιστούν ως ταλάντωση του H με συχνότητα $\omega = 6.9 \times 10^{13}$ Hz και απόσταση ισορροπίας d_0 =1.61Å, ενώ το πολύ βαρυτερο I είναι ακίνητο. Η κίνηση γίνεται σε μια διάσταση με Χαμιλτωνιανή

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m_p} + \frac{1}{2}m_p\omega^2(d-d_0)^2.$$

(α) Βρείτε τις τρεις χαμηλότερες ιδιοτιμές της σε eV.

(β) Δώστε την κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους και της πρώτης διεγερμένης κατάστασης (βάλτε αριθμητικές τιμές για μήκη μετρημένα σε Å).

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή και την αβεβαιότητα του d στην θεμελιώδη στάθμη.

(δ) Αν το μόριο είναι στην θεμελιώδη κατάσταση, ποιο ειναι το μέγιστο μήκος κύματος φωτονίου που απαιτειται για να διεγερθεί;

(ε) Σε ένα δειγμα 10^{23} μοριων τα οποία είναι όλα στην θεμελιώδη στάθμη, πόσα έχουν απόσταση H-I μεταξύ 1.60Å και 1.62Å; Θεωρήστε ότι η κυματοσυνάρτηση είναι σταθερή στο διάστημα [1.60Å,1.62Å] και ίση με την τιμή της για d_0 =1.61Å.

Θέμα 4 (3.0)

(α) Δείξτε ότι στον αρμονικό ταλαντωτή με $\hbar = m = \omega = 1$, οι πίνακες που δινουν τους τελεστές x και p στην βάση των ιδιοκαταστάσεων της Χαμιλτωνιανής και αποτελούνται από στοιχεια $\langle n|x|m\rangle$ και $\langle n|p|m\rangle$, $n, m = 0, 1, 2, 3, \ldots$ είναι :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \qquad p = \frac{1}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε τους τελεστές δημιουργιας και καταστροφής.

Στα επόμενα ερωτήματα, κρατήστε από τους παραπάνω άπειρους πίνακες μόνο τις πάνω αριστερά κομμάτι 3×3, δηλαδή περιοριστείτε σε $m, n \leq 2$.

(β) Υπολογίστε τους πίνακες $x^2 = xx, p^2 = pp, x^4 = x^2x^2, \mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}p^2$ και $\mathcal{H} = \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}p^2$.

(γ) Βρειτε τις ιδιοτιμές του $\mathcal{H}$.

Θέμα 5 (μπόνους +1.5)

Τα παρακάτω ερωτήματα αφορούν το θέμα 4. Μπορούν να απαντηθούν χωρίς καθόλου πράξεις.

(α) Ποια θα ήταν η μορφή του $\mathcal{H}_0$ αν δεν έιχαμε περιοριστει σε $m, n \leq 2$;

(β) Αν δεν είχατε περιοριστεί σε $m, n \leq 2$, θα είχατε βρει την θεμελιώδη και την πρώτη διεγερμένη στάθμη του $\mathcal{H}$ να έχουν ενέργειες $E_0 = 0.53$ και $E_1 = 1.90$. Γιατί το σφάλμα του υπολογισμού σας ειναι πολύ μεγαλύτερο για το E_1 από ό,τι είναι για το E_0;

(γ) Έστω ότι $|0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ είναι η κανονικοποιημένη η ιδιοκατάσταση της $\mathcal{H}$ που αντιστοιχεί στην E_0. Δειξτε οτι 1) $b = 0$ και 2) $|a| >> |c|$.

Ατομικές μονάδες:

$\alpha_B = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$=0.529 Å, $\quad E_0 = \dfrac{\hbar^2}{ma_B^2} = 27.211$ eV, $\quad u_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$=2187.77 km/s,

$\omega_0 = \frac{2\pi u_0}{\alpha_B} = 2.60 \times 10^{17}$ Hz, $\quad P_0 = \frac{E_0}{a_B^3} = 29421$ GPa, $\quad T_0 = \frac{E_0}{k_B} = 315773$ K,

Σταθερές:

1 bar = 10^5 N m^{-2},	$m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kgr,	$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C,
$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s,	$c = 3.00 \times 10^8$ m/s,	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$mol^{-1},
1 cal = 4.18 J,	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m,	$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$J K^{-1},
$m_p = 1836.2 m_e$,	$hc = 12398$ eV Å,	$k_B^{-1} = 11605$ K/eV.

Ολοκληρωματα:

$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a > 0)$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-2bx}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{a}} \quad (a > 0)$

$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-a(x-b)^2}\,\mathrm{d}x = b\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\mathrm{Re}(a) > 0)$ $\qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (a > 0)$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k+1}a^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & (n = 2k, k \text{ integer}, a > 0) \\ \frac{k!}{2a^{k+1}} & (n = 2k+1, k \text{ integer}, a > 0) \end{cases}$$

Θεωρία Υλικών
Εξέταση Προόδου της 25/11/2014

Θέμα 1

(α) Θεωρήστε σωμάτιο σε αρμονικό ταλαντωτή με $\hbar = m = \omega = 1$ του οποίου η κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ ειναι κανονικοποιημένη, άρτια και πραγματική. Δείξτε οτι η μέση ενέργειά του ισούται με $E = \int_0^\infty \psi'^2(x)dx + \int_0^\infty x^2\psi^2(x)dx$.

(β) Υπολογίστε με τον παραπάνω τύπο την ελάχιστη τιμή της E ως προς την παράμετρο a ($a > 0$) για την $\psi(x) = Ae^{-ax^2}$.

Υπόδειξη: κάντε κανονικοποίηση για να βρείτε το A. Βρείτε την $E(a)$ από τον τύπο του (α) ερωτήματος. Βρείτε το ελάχιστο από την $E'(a_0) = 0$. Ελάχιστη τιμή είναι $E_0 = E(a_0)$.

(γ) Το ίδιο για $\psi(x) = \dfrac{A}{x^2 + a^2}$.

(δ) **(μπόνους)** Γιατί η ενέργεια E_0 στο (γ) προκύπτει μεγαλύτερη από την E_0 του (β); Υπάρχει κυματοσυνάρτηση ψ για την οποία η E_0 να προκύπτει μικρότερη από 1/2;

Θέμα 2

Ηλεκτρόνιο αλληλεπιδρά με δυο μαγνητικά πεδια: το πρώτο έχει ένταση 1 T και κατεύθυνση $\hat{\mathbf{z}}$ και το δεύτερο έχει ένταση 0.15 T και κατεύθυνση $\hat{\mathbf{x}}$.

(α) Γράψτε τον πίνακα που αναπαριστά την Χαμιλτονιανή για την κίνηση του σπιν. Τα στοιχεία πίνακα να ειναι σε μονάδες 10^{-24} J με τρια σημαντικά ψηφία.

(β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτονιανής με τρια σημαντικά ψηφια.

(γ) Η προβολή του σπιν στον $\hat{\mathbf{y}}$ ισούται με $\hbar/2$ κάθε χρονική περιοδο T. Βρείτε την T.

Υπόδειξη: θεωρήστε για $t = 0$ ότι $|\Psi(0)\rangle$ είναι η ιδιοκατάσταση του s_y με ιδιοτιμή $\hbar/2$ και βρείτε την $|\Psi(t)\rangle$ και την πιθανότητα $P(t) = |\langle\Psi(t)|\Psi(0)\rangle|^2$. Βρείτε την περίοδο της $P(t)$.

Θέμα 3

Σώμα κινείται στην επιφάνεια σφαίρας με κβαντικό αριθμό στροφορμής $l = 2$.

(α) Βρείτε την κυματοσυνάρτησή του, $\psi(\theta, \phi)$ η οποία ειναι ιδιοκατάσταση του l_x με ιδιοτιμή 0.

(β) Το ίδιο ερώτημα για ιδιοτιμή $\hbar$.

(γ) Δείξτε ότι οι συναρτήσεις που βρηκατε στα (α) και (β) έχουν τις παρακάτω συμμετρίες τις οποίες θα πρέπει να έχουν όλες οι ιδιοκαταστάσεις του l_x:

1. $z \to -z$: $|\psi(\theta, \phi)|^2 = |\psi(\pi - \theta, \phi)|^2$.
2. $y \to -y$: $|\psi(\theta, \phi)|^2 = |\psi(\theta, 2\pi - \phi)|^2$.
3. $x \to -x$: $|\psi(\theta, \phi)|^2 = |\psi(\theta, \pi - \phi)|^2$.

(δ) **(μπόνους)** Δώστε πρόχειρο σκίτσο των $|\psi(\theta, \phi)|^2$ των ερωτημάτων (α) και (β). Σε ποια περιοχη ειναι πιο πιθανό να βρεθεί το σώμα σε κάθε περίπτωση;

Ατομικές μονάδες:

$\alpha_B = \dfrac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ =0.529 Å, $E_0 = \dfrac{\hbar^2}{ma_B^2} = 27.211$ eV, $u_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}}$=2187.77 km/s,

$\omega_0 = \frac{2\pi u_0}{\alpha_B} = 2.60 \times 10^{17}$ Hz, $P_0 = \frac{E_0}{a_B^3} = 29421$ GPa, $T_0 = \frac{E_0}{k_B} = 315773$ K,

Σταθερές:

1 bar = 10^5 N m^{-2}, $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$ kgr, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C,

$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s, $c = 3.00 \times 10^8$ m/s, $N_A = 6.022 \times 10^{23}$mol^{-1},

1 cal = 4.18 J, $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m, $k_B = 1.381 \times 10^{-23}$J K^{-1},

$m_p = 1836.2 m_e$, $hc = 12398$ eV Å, $k_B^{-1} = 11605$ K/eV.

Ολοκληρωματα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (a>0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-2bx}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{a}} \quad (a>0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-a(x-b)^2}\,\mathrm{d}x = b\sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\mathrm{Re}(a)>0) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2k-1)}{2^{k+1}a^k}\sqrt{\frac{\pi}{a}} & (n=2k, k \text{ integer}, a>0) \\ \frac{k!}{2a^{k+1}} & (n=2k+1, k \text{ integer}, a>0) \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} \quad (a>0) \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a^3} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a^2} \quad (a>0) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4a} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{32a^7} \quad (a>0) \qquad \int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{32a^5} \quad (a>0)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{(x^2+a^2)^{m+1}}\mathrm{d}x = \frac{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2(m-n)-1))\pi}{2^{m+1}m!a^{2(m-n)+1}} \quad a>0, m>n.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(x^2+a^2)^{m+1}}\mathrm{d}x = \frac{(m-n-1)!n!}{2m!a^{2(m-n)}} \quad a>0, m>n.$$

Σφαιρικές αρμονικές:

$Y_{2,-2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}e^{-2i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta$ $\qquad Y_{2,-1}(\theta,\phi) = \frac{1}{2}e^{-i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta$

$Y_{2,0}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}\left(-1+3\cos^2\theta\right)$

$Y_{2,1}(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}e^{i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\cos\theta\sin\theta$ $\qquad Y_{2,2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}e^{2i\phi}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta$

Ο πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές $\pm\sqrt{a^2+b^2}$ και ιδιοανύσματα $\begin{pmatrix} \frac{a\pm\sqrt{a^2+b^2}}{b} \\ 1 \end{pmatrix}$

Θεωρία Υλικών
Εξέταση Προόδου της 16/11/2015

Choose any four problems

Θέμα 1 The vibrations of the O_2 molecule can be described as the motion of a particle with mass $m = 1.4 \times 10^{-26}$ kg that has potential energy equal to $V(d) = V_0(1 - \mathrm{e}^{-a(d-d_0)})^2$ where d is the O-O distance and $d_0 = 1.2$ Å, $V_0 = 5.2$ eV and $a = 0.4$ Å^{-1}. The system is at its ground state and the Taylor expansion, $e^z \approx 1 + z$, can be applied. (a) Calculate the uncertainty, Δd. (b) Calculate the minimum energy, ΔE required to excite the molecule to the first excited state.

$e = 1.6 \times 10^{-19}\mathrm{C}, \hbar = 1.05 \times 10^{-34}\mathrm{J\ s}.$

Θέμα 2 Operator $l_z = \mathrm{i}\hbar \left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y} \right)$ has three different eigenfunctions of the general form $\psi(x, y) = ax + by + c$ with eigenvalues $m\hbar$. Find them.

Θέμα 3 The spin operators for a particle with spin 1 are

$$s_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

A particle has spin $s = 1$ and is at state d $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, where a, b, c are real and ≥ 0 and $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Calculate a, b, c given that if one measures s_x, the probability of finding 0 is $P_1 = 10\%$ and that if one measures s_z, the probability of finding $-\hbar$ is $P_2 = 20\%$.

Θέμα 4 Consider s_x, s_y and s_z that are the matrices that represent the spin components for fixed spin s in the same representation we used for $s = 1/2$. Show that

(a) s_z has non-zero elements only along the main diagonal.

(b) s_x and s_y have non-zero elements only along the diagonals right above and right below the main diagonal.

(c) s_x and s_z have real elements while s_y has imaginary elements.

Θέμα 5 A particle an one-dimensional box of length L has wavefunction $\psi(x) = a + bx + cx^2$, where a, b, c are real. Take $L = 1, m = 1, \hbar = 1$.

(a) Find a,b,c so that ψ is normalized and $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

(b) Calculate the uncertainties Δx and Δp.

Μεταφράσεις:

1. Οι ταλαντώσεις του μοριου O_2 περιγράφονται σαν κίνηση σώματος μάζας m το οποίο έχει δυναμική ενέργεια $V(d)$, όπου d ειναι η απόσταση O-O. Το σύστημα ειναι στην θεμελιώδη στάθμη και μπορει να εφαρμοστει το ανάπτυγμα Taylor της e^z. (α) Υπολογιστε την αβεβαιότητα Δd και την ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να διεγερθεί το μόριο στην πρώτη διεγερμένη κατάσταση.

2. Ο τελεστής l_z έχει τρεις διαφορετικές ιδιοσυναρτήσεις της γενικής μορφής $\psi = \ldots$ με ιδιοτιμές $m\hbar$. Βρείτε τις.

3. Σώμα με σπιν $s = 1$ ειναι στην κανονικοποιημένη κατάσταση $|\psi\rangle$ όπου a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοι με $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Υπολογίστε τα a, b, c με δεδομένα ότι 1) αν μετρηθεί η s_x η πιθανότητα να βρεθέι 0 ειναι $P_1 = 10\%$ και 2) αν μετρηθεί η s_z, η πιθανότητα να βρεθεί $-\hbar$ ειναι P_2 =20%.

4. Οι πίνακες s_x, s_y, s_z αναπαριστούν τις συνιστώσες του σπιν για δεδομένο σπιν s στην ίδια αναπαράσταση που χρησιμοποιήσαμε για την μελέτη του $s = 1/2$. Δειξτε οτι (α) s_z έχει μη μηδενικά στοιχεια μόνο στην κύρια διαγώνιο (β) οι s_x, s_y έχουν μη μηδενικά στοιχεία μόνο στις διαγωνίους πάνω και κάτω από την κύρια και (c) οι s_x, s_z έχουν πραγματικά στοιχεία ενώ ο s_y έχει φανταστικά στοιχεία.

5. Σώμα σε μονοδιάστατο κουτί μήκους L έχει κυματοσυνάρτηση $\psi(x)$ με a, b, c πραγματικούς. Πάρτε $L = 1, m = 1, \hbar = 1$. (a) Βρείτε τα a, b, c ώστε η ψ να είναι κανονικοποιημένη και $\psi(0) = \psi(1) = 0$. (b) Υπολογίστε τις αβεβαιότητες Δx και Δp.

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{5} & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\sqrt{5} & 0 & -2i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\sqrt{2} & 0 & -3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3i & 0 & -2i\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

ΠΡΟΟΔΟΣ 2015 - ΛΥΣΕΙΣ

$\boxed{\Theta 1}$ $V(x) \simeq V_0 \alpha^2 (d-d_0)^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ with $x = d - d_0$, $\omega = \sqrt{\frac{2V_0\alpha^2}{m}} = 4.7 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$

$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = 9.3 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m} = 0.093\,\text{Å}$. $\Delta x = \sqrt{\frac{1}{2}}\, x_0$ (γενικά $\Delta x = \sqrt{n + \frac{1}{2}}$ σελ 246 Τραχ)

$\Rightarrow \Delta x = 0.066\,\text{Å}$. $x = d - d_0 \rightarrow \Delta d = \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta d = 0.066\,\text{Å}}$,

$\Delta E = (1 + \frac{1}{2})\hbar\omega - \frac{1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega \Rightarrow \boxed{\Delta E = 0.032\,\mathrm{eV}}$

$\boxed{\Theta 2}$ $L_z \psi = m\hbar\psi \Rightarrow i\hbar(ya - xb) = m\hbar(ax + by + c)$

$\boxed{\begin{array}{c} Ax+By+\Gamma=0 \\ \text{για κάθε } x,y \\ \Leftrightarrow A=0=B=\Gamma \end{array}}$

$\Rightarrow (ma + ib)x + (mb - ia)y + mc = 0$ για κάθε x, y. $(*)$

Λύσεις 1) $m \neq 0 \rightarrow c = 0$, $\left.\begin{array}{l} ma + ib = 0 \\ -ia + mb = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{vmatrix} m & i \\ -i & m \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$

Για $m = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} a + ib = 0 \\ -ia + b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\psi_1(x,y) = x + iy,\ m = 1}$

Για $m = -1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} -a + ib = 0 \\ -ia - b = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{\psi_2(x,y) = x - iy,\ m = -1}$

2) Αν $m = 0$ ~~[illegible]~~ η $(*)$ γίνεται $ibx - iay = 0 \Rightarrow a = b = 0 \rightarrow \boxed{\psi_3(x,y) = c,\ m = 0}$

$\boxed{\Theta 3}$ Ιδιοκατάσταση του S_x με ιδιοτιμή 0 έστω $|S_x = 0\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$S_x |S_x = 0\rangle = 0 \Rightarrow \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b \\ a + c \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow |S_x = 0\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Προφανώς $|S_z = -\hbar\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

άρα $P_1 = |\langle S_x = 0|\psi\rangle|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a - \frac{1}{\sqrt{2}} c\right)^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow a = c + 2/\sqrt{5}$

$P_2 = |\langle S_z = -\hbar|\psi\rangle|^2 = c^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{c = 1/\sqrt{5}} \Rightarrow \boxed{a = 2/\sqrt{5}}$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow b = \sqrt{1 - a^2 - c^2} \Rightarrow b = \sqrt{1 - \frac{1}{5} - \frac{4}{5}} \Rightarrow \boxed{b = 0}$

$\boxed{\Theta 4}$ Εξ ορισμού ιδιοκατ. S_z είναι $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ κλπ άρα S_z διαγώνιος

$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$ άρα δύο ίσα διαγώνια, τύπου πάνω-κάτω και πραγματ. ενώ $S_y = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-)$

$\boxed{\Theta 5}$ $\psi(0) = 0 \Rightarrow a = 0$, $\psi(1) = 0 \Rightarrow b = -c \Rightarrow \psi(x) = cx^2 - cx$ $\int \psi^2 dx = 1 \Rightarrow c^2 = 30$.

$\langle x \rangle = \int_0^1 x\psi^2 dx = c^2 \int (x^5 - 2x^4 + x^3) = 30\left(\frac{1}{6} - 2\frac{1}{5} + \frac{1}{4}\right) = 5 - 12 + 7.5 = 0.5$

$\langle x^2 \rangle = \int_0^1 x^2\psi^2 dx = c^2 \int_0^1 x^6 - 2x^5 + x^4) = 30\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{6} + \frac{1}{5}\right) = \frac{30}{7} - 4 = 2/7$

$\Rightarrow \Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - x^2} = \sqrt{\frac{2}{7} - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{8}{28} - \frac{7}{28}} = \sqrt{\frac{1}{28}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \simeq \underline{\underline{0.19}}$

$\langle p \rangle = 0$; $\langle p^2 \rangle = \int \psi(-\hbar^2 \psi'') dx = c^2 \int (x^2 - x)(-2) dx = -30\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 10 \Rightarrow \Delta p = \sqrt{10} \simeq 3.16$

$\Delta x \Delta p = 0.60 > 0.5$ ok.

Θεωρία Υλικών
Εξέταση Προόδου της 10/11/2016

Θέμα 1 Αποδείξτε ότι οι αβεβαιότητες θέσης και ορμής για την κατάσταση με κβαντικό αριθμό n στο απειρόβαθο πηγάδι είναι ($\hbar = m = L = 1$):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2 n^2}} \qquad \text{και} \qquad \Delta p = \pi n$$

.

Αποδείξτε ότι ισχύει η αρχή του Heisenberg.

Θέμα 2 Σώμα μάζας m κινείται ελεύθερα στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R. Η Χαμιλτονιανή είναι $H = \dfrac{l^2}{2mR^2}$, όπου l το μέτρο της στροφορμής. Πάρτε $\hbar = m = R = 1$. Η κυματοσυνάρτηση του σώματος είναι $\psi(\theta, \phi) = aY_{00}((\theta, \phi) + bY_{11}(\theta, \phi)$, με με a, b θετικούς πραγματικούς αριθμούς και η μέση ενέργεια του σώματος είναι $\langle E \rangle = 1$. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $\langle \cos^2 \phi \rangle$ και $\langle \cos^2 \theta \rangle$.

Θέμα 3 Σώμα σε αρμονικό ταλαντωτή (με $\hbar = m = \omega = 1$) έχει κυματοσυνάρτηση $\psi(x) = 0$ για $|x| > 1$ και $\psi(x) = \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{2}$ για $|x| \leq 1$.

(1) Αν μετρήσουμε την ενέργεια του σώματος, τι τιμές μπορεί να προκύψουν;

(2) ποια θα είναι η πιθανότερη από αυτές τις τιμές και γιατί;

(3) Επαναλάβετε το ερώτημα (2) στην περίπτωση που ο τύπος της ψ είχε sin αντί για cos.

Θέμα 4 Σώμα με μάζα M, φορτίο Q και σπιν 1 βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο . Η Χαμιλτονιανή του είναι $H = \dfrac{gQ}{M} B s_z$ (g= σταθερά). Για $t = 0$ το σώμα έχει $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(1) Αποδείξτε ότι $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\omega t} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Πόσο είναι το ω ;

(2) Αποδέιξτε ότι $< s_x >= \cos \omega t$.

(3) Αποδέιξτε ότι $< s_y >= \sin \omega t$.

(4) Επιβεβαιώστε ότι ισχύει το θεώρημα Ehrenfest για την χρονική παράγωγο των μέσων τιμών στα αποτελέσματα (2) και (3).

$$s_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, s_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Θεωρία Υλικών
Εξέταση Προόδου της 7/11/2017

Θέμα 1 (5.0) Σωματίδιο έχει σπιν $s = 1/2$. Θεωρήστε ως βάση του χώρου τις ιδιοκαταστάσεις του s_z: $\left\{ |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Η Χαμιλτωνιανή του συστήματος είναι $\mathcal{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$.

(α) Αποδείξτε ότι η $\mathcal{H}$ έχει ιδιοτιμές $-\hbar\omega, 2\hbar\omega$. Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις της.

(β) Βρείτε τον πίνακα που περιγράφει τον τελεστή $\Sigma = \frac{\sqrt{2}}{2}(s_x + s_y)$. Δείξτε ότι έχει ιδιοτιμές $\pm\hbar/2$. Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του.

(γ) Δείξτε ότι ο τελεστής s_y έχει ιδιοτιμές $\pm\hbar/2$. Βρείτε τις ιδιοκαταστάσεις του.

(δ) Μετράμε την τιμή του s_y και βρίσκουμε τιμή $\hbar/2$. Αμέσως μετά την μέτρηση, μετράται ο Σ. Ποιές τιμές μπορεί να προκύψουν από την μέτρηση, με ποιες πιθανότητες, ποια η αναμενόμενη (μέση) τιμή και ποια η αβεβαιότητα των μετρήσεων;

(ε) Βρείτε την $|\psi\rangle$ του συστήμτος σε χρόνο $t_1 = 5\pi/\omega$ και σε χρόνο $t_2 = 10\pi/\omega$.

Θέμα 2 (2.5) Σώμα βρίσκεται σε κατάσταση με κυματοσυνάρτηση

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ Axe^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Υπολογίστε το A και εν συνεχεία την αβεβαιότητα θέσης, Δx.

Θέμα 3 (2.5) Θεωρήστε το σύστημα της στροφορμής με $\hbar = 1$ και τις καταστάσεις $|lm\rangle$ για τις οποίες ισχύει $\ell^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$ και $\ell_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle$.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $A = \ell_+\ell_+\ell_-\ell_-$.

(β) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαστάσεις του τελεστή $B = |32\rangle\langle 32| + |30\rangle\langle 30|$.

Θέμα 4 (2.5) Θεωρήστε το σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή με $\hbar = 1, m = 1, \omega = 1$ και ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής $|n\rangle$.

(α) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις του τελεστή $C = aaa^\dagger a^\dagger$.

(β) Υπολογίστε την αβεβαιότητα ορμής, Δp, στην κατάσταση $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|2\rangle - \frac{1}{2}|4\rangle$.