

Θεωρία Υλικών, Τελική εξέταση, 4/2/2013

Θέμα 1

Για τα στοιχειακό μέταλλο Άργυρο, Ag, δίνεται ότι η πυκνότητα είναι $\rho_M = 10.5 \text{ g/cm}^3$, το ατομικό βάρος 107.87, και στο άτομο του Ag η στοιβάδα σθένους είναι η 5s με ένα ηλεκτρόνιο.

α) Να βρεθεί ο ατομικός όγκος, V_a , για το υλικό αυτό (όγκος ανά άτομο).

β) Θεωρήστε την ακτίνα r_a μιας νοητής σφαίρας που έχει όγκο

$$V_a = \frac{4\pi}{3} r_a^3.$$

Η ποσότητα r_a είναι μια προσεγγιστική "ατομική ακτίνα" στα στερεά. Να βρεθεί η τιμή της για τον Ag στο ατομικό σύστημα μονάδων.

γ) Βρείτε την ενέργεια Fermi για τον Ag (σε eV), όπου $E_F = (\hbar^2/2m_e)(3\pi^2n)^{2/3}$ και n η πυκνότητα ηλεκτρονίων σθένους. Υπολογίστε επίσης τη μέση κινητική ενέργεια ανά ηλεκτρόνιο $\bar{U} = U/N$ (σε eV) (λαμβάνοντας υπόψη ότι η πυκνότητα καταστάσεων δίνεται από $\rho(E) = A\sqrt{E}$, A σταθερά), καθώς και την πίεση των ηλεκτρονίων αυτών, $P = -\partial U/\partial V$ (V είναι ο όγκος του συστήματος και N ο συνολικός αριθμός ηλεκτρονίων σθένους).

δ) Θεωρώντας ότι τα ηλεκτρόνια σθένους του Ag υπό την επίδραση εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, $\sim e^{-i\omega t}$, κινούνται ως ελεύθερα με την επίδραση μόνο μιας δύναμης τριβής $-m_e v/\tau$, όπου v η ταχύτητα των ηλεκτρονίων και τ ο χρόνος αποκατάστασης (εκτός από τη δύναμη που ασκείται από το πεδίο, $-eE$), να βρεθεί μία έκφραση για την αγωγιμότητα, σ , του Ag, καθώς και η τιμή της ειδικής αντίστασης του $\rho = 1/\sigma$ (σε $\mu\Omega \text{ cm}$) στο στατικό όριο. Υπενθυμίζεται ότι η αγωγιμότητα ορίζεται από την σχέση $j = \sigma E$, όπου $j = -nev$. Επίσης, για τον Ag $\tau = 36.7 \text{ fs}$. (Υπόδειξη: Λάβετε υπόψη σας ότι η ατομική μονάδα ειδικής αντίστασης είναι $\rho_0 = \hbar a_B/e^2 = 21.74 \mu\Omega \text{ cm}$, καθώς και ότι $m_e/\hbar a_B = 16.2 \times 10^7 \text{ sec/cm}^3$.)

Θέμα 2 (0.5+1.5)

Θεωρήστε δυο σωματίδια με σπιν $\frac{1}{2}$, τα οποία βρίσκονται σε μια κατάσταση $|\psi\rangle$ για την οποία ισχύει $S_{1z}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle$ και $S_{2x}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle$. Μετράμε το ολικό σπιν του συστήματος. (α) Τι αποτελέσματα μπορεί να προκύψουν; και (β) με τι πιθανότητες;

Θέμα 3 (1.5+1.5)

Σώμα μάζας m εκτελεί αρμονική ταλάντωση συχνότητας ω σε μια διάσταση.

(α) Η $Axe^{-\nu x^2}$ είναι ιδιοκατάσταση της Χαμιλτωνιανής. Υπολογίστε τις σταθερές A και ν και τις μέσες τιμές $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$, $\langle xp \rangle$, $\langle px \rangle$, $\langle xp - px \rangle$

(β) Η κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης στο παραπάνω σύστημα είναι $\psi_0(m, x)$. Θεωρήστε τώρα σύστημα δυο σωμάτων μάζας m , τα οποία εκτελούν ταλαντώσεις συχνότητας ω . Δείξτε ότι κυματοσυνάρτηση της θεμελιώδους στάθμης του συστήματος είναι

$$\psi_0(m, x_1)\psi_0(m, x_2)$$

ή ισοδύναμα

$$\psi_0(2m, \frac{x_1 + x_2}{2})\psi_0(\frac{m}{2}, x_1 - x_2).$$