

**Θέμα 1 (2.8)**

Για τα στοιχειακό μέταλλο Cu δίνεται ότι η πυκνότητα είναι  $\rho_M = 8.96 \text{ g/cm}^3$  και το ατομικό του βάρος 63.546. Η ηλεκτρονική δομή του ατόμου του Cu είναι  $[Ar]3^104s^1$ .

- α) Να βρεθεί ο ατομικός όγκος,  $V_a$ , για το υλικό αυτό (όγκος ανά άτομο).  
 β) Θεωρείστε την ακτίνα  $r_a$  μιας νοητής σφαίρας που έχει όγκο

$$V_a = \frac{4\pi}{3}r_a^3.$$

Η ποσότητα  $r_a$  είναι μια προσεγγιστική "ατομική ακτίνα" στα στερεά. Να βρεθεί η τιμή της για το Cu στο ατομικό σύστημα μονάδων.

γ) Υπολογίστε την ενέργεια Fermi στο μοντέλο ελευθέρων ηλεκτρονίων στις 3 διαστάσεις σε μηδενική θερμοκρασία. Τι τιμή έχει για το Cu;

δ) Εκτιμήστε την ενέργεια συνοχής των στερεών σαν συνάρτηση της ατομικής τους ακτίνας και βρείτε την τιμή της για το Cu.

**Θέμα 2 (2.2)**

Θεωρήσετε τον ενδογενή ημιαγωγό πυρίτιο (Si) στις δύο διαστάσεις με ενεργειακό χάσμα  $E_g = 1.1 \text{ eV}$  και ενεργό μάζα ηλεκτρονίων  $m^* = m_e$ .

α) Δείξτε ότι η ενεργειακή πυκνότητα καταστάσεων ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$$g(E) = \frac{m^*}{\pi h^2}.$$

β) Υπολογίστε την πυκνότητα ηλεκτρονίων,  $n$ , σε θερμοκρασία δωματίου και συγκρίνετέ την με την αντίστοιχη στις τρεις διαστάσεις, την οποία έχουμε βρεί  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  περίπου. Υπενθυμίζεται ότι μπορείτε να θεωρήσετε  $E_F = E_g/2$ .

**Θέμα 3 (2.0)**

Μαγνητικό νανοςωματίδιο με σπιν 1/2 βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Για  $t = 0$  το σωματίδιο έχει καθορισμένη προβολή  $s_x = \hbar/2$ . Υπολογίστε τις πιθανότητες μετρήσεις του σπιν μετά από χρόνο  $t$  να δώσουν αποτελέσματα

(α)  $s_x = \hbar/2$ ,

(β)  $s_y = -\hbar/2$ ,

(γ)  $s_y = \hbar/2$ ,

(δ)  $s_z = \hbar/2$ .

#### Θέμα 4 (3.0)

Η Χαμιλτονιανή συστήματος ηλεκτρονίου-πρωτονίου είναι

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{p}_p^2}{2m_p} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} (|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|),$$

παφανορεια?

όπου  $m_e, \mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e, m_p, \mathbf{r}_p, \mathbf{p}_p$  η μάζα, θέση και ορμή του ηλεκτρονίου και πρωτονίου, αντίστοιχα. Θέτουμε  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p$  και  $\mathbf{R} = \frac{m_e \mathbf{r}_e + m_p \mathbf{r}_p}{M}$ , όπου  $M = m_e + m_p$  η συνολική μάζα.

(α) Να βρεθούν εκφράσεις για δυο μεταβλητές ορμής,  $\mathbf{p}$  και  $\mathbf{P}$  ώστε ο μετασχηματισμός να είναι κανονικός, δηλαδή οι νέες μεταβλητές έχουν ίδιες μεταθετικές σχέσεις με τις παλιές. Θα πρέπει δηλαδή να ικανοποιούνται όλες οι παρακάτω σχέσεις:

$$[\mathbf{R}, \mathbf{r}] = 0 \quad [\mathbf{P}, \mathbf{p}] = 0 \quad [\mathbf{R}, \mathbf{p}] = 0 \quad [\mathbf{r}, \mathbf{P}] = 0 \quad [\mathbf{R}, \mathbf{P}] = i\hbar \quad [\mathbf{r}, \mathbf{p}] = i\hbar$$

Υπόδειξη: δοκιμάστε γραμμική σχέση.

(β) Αντιστρέψτε το μετασχηματισμό σας για να βρείτε τα  $\mathbf{r}_e, \mathbf{p}_e, \mathbf{r}_p, \mathbf{p}_p$  σαν συνάρτηση των  $\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}$ . Αντικαταστήστε στην Χαμιλτωνιανή και δείξτε ότι αυτή αποκτά όμοια μορφή με την αρχική, αλλά περιγράφει πλέον δυο ανεξάρτητα σωματίδια, ένα μάζας  $M$  και ένα μάζας  $\mu$ .

(γ) Βρείτε τις ιδιοτιμές και ιδιοκαταστάσεις της Χαμιλτωνιανής (θεωρήστε γνωστή τη λύση για το άτομο του υδρογόνου). Βρείτε πόσο αλλάζει η ενέργεια της θεμελιώδους στάθμης σε σχέση με το αποτέλεσμα όταν το πρωτόνιο θεωρείται ακίνητο.

(δ) (δύορο +0.5) Σε ένα δείγμα ατομικού H για  $T \rightarrow 0$ , πόση είναι η ψηλότερη, η χαμηλότερη και η μέση ενέργεια που μπορεί να έχει ένα άτομο;

Δίνονται οι ατομικές μονάδες:

$$\alpha_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \text{ (SI)} = \frac{\hbar^2}{me^2} \text{ (CGS)} = 0.529 \text{ \AA}, \quad E_0 = \frac{\hbar^2}{ma_B^2} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a_B} = 27.211 \text{ eV},$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{E_0}{m}} = 2187.77 \text{ km/s}, \quad P_0 = 294.21 \text{ Mbar}, \quad T_0 = 315773 \text{ K},$$

και οι σταθερές:

$$\begin{aligned} 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ N m}^{-2}, & m &= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}, & e &= 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}, \\ \hbar &= 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}, & c &= 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}, & N_A &= 6.022 \times 10^{23}, \\ 1 \text{ cal} &= 4.18 \text{ J}, & \epsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, & k_B &= 1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}. \end{aligned}$$

Καλή επιτυχία!