Θεωρία Υλικών
Εργασία 4

1. Στα πλαίσια μιας φαινομενολογικής προσέγγισης για τον υπολογισμό της διηλεκτρικής συνάρτησης των στερεών μπορεί να χρησιμοποιηθεί το μοντέλο των μηχανικών ταλαντωτών. Τα ηλεκτρόνια εκτελούν ταλαντώσεις κάτω από την επίδραση του εξωτερικού ηλεκτρικού πεδίου, $E(\omega)$ (με μήκος κύματος πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση μεταξύ των ατόμων) και οι συγκρούσεις τους με τα ιόντα περιγράφονται φαινομενολογικά με ένα όρο τριβής που εξαρτάται από το λεγόμενο χρόνο αποκατάστασης τ. Αν x είναι η μετατόπιση ενός ηλεκτρονίου από την θέση ισορροπίας και $m_e\omega_e^2$ η σταθερά της δύναμης επαναφοράς, η εξίσωση κίνησης δίνεται από την γενική σχέση:

$$m_e\ddot{x} = -m_e\omega_e^2 x - m_e\dot{x}/\tau - eE.$$

Να βρεθεί μία έκφραση για την αγωγιμότητα, η οποία ορίζεται από την σχέση $j = \sigma E$, όπου $j = -ne\dot{x}$ και n είναι η πυκνότητα ηλεκτρονίων. Κατόπιν, να βρεθεί η διηλεκτρική συνάρτηση χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\,\sigma(\omega)$$

στην περίπτωση των μονωτών (δέσμια ηλεκτρόνια που ταλαντώνονται γύρω από θέσεις ισορροπίας, αγνοήστε την τριβή $-m_e\dot{x}/\tau$) και των μετάλλων (σχεδόν ελεύθερα ηλεκτρόνια που κινούνται σε μεγάλες αποστάσεις, αγνοήστε τη δύναμη επαναφοράς $-m_e\omega_e^2 x$). Ποια είναι η στατική ηλεκτρική αγωγιμότητα ($\omega = 0$) σε κάθε περίπτωση;

2. Θεωρήστε μη μαγνητικό, ισοτροπικό υλικό και με αφετηρία τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

και $\mathbf{D} = \varepsilon(\omega, \mathbf{k})\mathbf{E}$, καταλήξτε στην εξίσωση ηλεκτρομαγνητικού κύματος. Στη συνέχεια, αναζητώντας λύσεις της μορφής $\mathbf{E} \sim \exp i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)$, βρείτε τη σχέση διασποράς ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο μέσο αυτό. Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση εξηγήστε αν και πώς διαδίδονται εγκάρσια και διαμήκη κύματα.

3. Με αφετηρία τις εξισώσεις του Maxwell για υλικά (σε ασθενή πεδία), να αποδειχθεί η σχέση

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\,\sigma(\omega)$$

(στο σύστημα μονάδων CGS)

4. Αν N είναι ο αριθμός ηλεκτρονίων στη ζώνη αγωγιμότητας ενός μετάλλου το οποίο έχει ενέργεια Fermi $\mathcal{E}_F$, εκτιμήστε το σχετικό αριθμό ηλεκτρονίων $\Delta N/N$ που είναι θερμικά διεγερμένα σε υψηλότερες ενεργειακές καταστάσεις σε θερμοκρασία $T > 0$.

   Υπόδειξη: από τη συνάρτηση Fermi-Dirac, υποθέστε ότι ότι τα θερμικά διεγερμένα ηλεκτρόνια είναι σε ένα εύρος ενεργειακών καταστάσεων $\Delta\mathcal{E} \simeq 2k_BT$ και ότι $k_BT << \mathcal{E}_F$.