ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΟΔΟΥ 7/12/07

$Z=20$ (Ca)

ΘΕΜΑ 1 (ενδεικτικά)

$d = 3.95$ Å   απόσταση άρα >0, μήκος άρα Å

$\rho_M = 1.55\ gr/cm^3$ $\frac{\text{μάζα}>0}{\text{όγκος}>0} \Rightarrow \rho_M>0$ μονάδες $\frac{\text{μάζα}}{\text{όγκος}} = \frac{\text{μάζα}}{\text{μήκος}^3} = \frac{gr}{cm^3}$

$B = 0.152$ Mbar $B = -V\frac{\Delta P}{\Delta V}$ για $\Delta P>0$ είναι $\Delta V<0$, αφού αν συμπιέσω ένα υλικό ο όγκος θα μικρύνει. Άρα $B>0$ επίσης από τον ορισμό φαίνεται ότι το B έχει μονάδες πίεσης

$C_p = 25.25\ J/mol\,K$ $C_p = \frac{1}{m}\frac{\Delta Q}{\Delta T} > 0$ αφού αν δώσω ενέργεια στο υλικό δηλ $\Delta Q>0$ η θερμοκρασία θα ανέβει ($\Delta T>0$) Μονάδες $\frac{\text{ενέργεια}}{\text{μάζα θερμ.}}$

$\Theta_D = 230$ K $\Theta_D>0$ αφού είναι θερμοκρασία, μονάδες K προφανώς

<u>Τάξεις μεγέθους:</u> η απόσταση καθορίζεται από το ισοζύγιο της κβαντικής άπωσης λόγω αρχής αβεβαιότητας και της ηλεκτρικής έλξης άρα $d = f(m, \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}, \hbar)$. Ο μόνος συνδυασμός αυτών με διαστάσεις μήκους είναι η ακτίνα Bohr, $a_B = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.53$ Å άρα $d \sim$ Å. Η πυκνότητα καθορίζεται από την απόσταση d και τη μάζα του πυρήνα, που είναι $\sim 10 m_p \sim 10^4 m \sim 10^4 \cdot 10^{-30} kg \sim 10^{-26} kg$ άρα $\rho_M \sim 10^{-26} kg/(1Å)^3$ ή $\rho_M \sim 10^{-23} gr/10^{-24} cm^3 \sim 10\ gr/cm^3$. Το μέτρο ελαστικότητας δείχνει πόσο εύκολα συμπιέζεται το υλικό, άρα κι αυτό εξαρτάται από την ισχύ της κβαντικής άπωσης και ηλεκτρικής έλξης, δηλ $B_0 = f(m, \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}, \hbar)$. Ο μόνος συνδυασμός αυτών με διαστάσεις πίεσης είναι η ατομική μονάδα πίεσης, $P_0 \simeq 294$ Mbar άρα $B \sim 100$ Mbar (εδώ η διαστατική ανάλυση πέφτει λίγο έξω). Η θερμοχωρητικότητα $C_p = \frac{dU}{dT}$ και $U \sim 3N_i k_B T$ άρα $C_p \simeq 3N_i k_B$ ή για ένα mol $N_i = N_A$ $C_p = 3R = 24.9\ J/mol\,K$

Τέλος, $\Theta_D = \frac{\hbar c q_D}{k_B} \sim \frac{\hbar}{k_B a_B}\sqrt{\frac{m}{M_i}}\,\upsilon_0 \sim \frac{1}{100} T_0$ όπου $T_0 = f(m, \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}, \hbar, k_B) \sim 10^5 K$

άρα $\Theta_D \sim 10^3 K$

ΘΕΜΑ 2 (ενδεικτικά)

δομή fcc $a = 5{,}58\,\text{Å} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{2}} = 3{,}95\,\text{Å}$

$\rho_M = \frac{4m_i}{a^3} = \frac{4}{a^3}\frac{A}{N_A} = 1{,}55\ \text{gr/cm}^3$

$B = \frac{1}{6\pi}\frac{a}{r_s^5} = \frac{1}{6\cdot 3{,}14}\ \frac{3{,}\cancel{380}}{3{,}170^5}\ \text{a.u} = \ldots = 0{,}165\ \text{Mbar}$

$C_p \approx C_v = 3R = 24{,}95\ \text{J/mol K}$

$\theta_D = \hbar c q_D / k_B = \frac{\hbar}{k_B} f \sqrt{\frac{B}{\rho_M}}\left(6\pi^2 n_i\right)^{1/3}$ με $f \approx 0.7$

$\Theta_D = 156\ \text{K}$

ΘΕΜΑ 3

Ηλεκτρόνια για T=0 $E_{min} = 0$ $E_{max} = E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 n\right)^{2/3}$

$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(3\pi^2 / \tfrac{4}{3}\pi r_s^3\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3}\frac{1}{r_s^2}$

$= 2{,}60\ \text{eV}$

$E_{ave} = \frac{2}{N}\int_0^{E_F} E\rho(E)\,dE = \frac{1}{\cancel{N}}\int_0^{E_F} E\,\frac{3\cancel{N}}{4E_F^{3/2}}E^{1/2}\,dE$

$= \frac{3}{2E_F^{3/2}}\int_0^{E_F} E^{3/2}\,dE = \frac{3}{2}E_F^{-3/2}\ \frac{2}{5}E_F^{5/2} = \frac{3}{5}E_F = 1.56\ \text{eV}$

Φωνόνια $E_{min} = 0$ $E_{max} = \varepsilon_D = k_B\Theta_D = 0{,}020\ \text{eV}$

$E_{ave} = \frac{1}{3N_i}\int_0^{\varepsilon_D} \varepsilon\, g(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{\cancel{3}}{3N_i}\int_0^{\varepsilon_D} \varepsilon\,\frac{9N_i\varepsilon^2}{\varepsilon_D^3}\,d\varepsilon = \frac{3}{\varepsilon_D^3}\int_0^{\varepsilon_D}\varepsilon^3\,d\varepsilon$

$= \frac{3}{4}\varepsilon_D = 0{,}015\ \text{eV}$

πλασμόνιο $E = \hbar\omega_p = \hbar\sqrt{\frac{n e^2}{m\varepsilon_0}} = 2{,}36\ \text{eV}$

ΘΕΜΑ 4

$\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon = \frac{2\pi k\,dk}{(2\pi)^2/A} = \frac{A}{2\pi}k\,dk \Rightarrow \rho(\varepsilon) = \frac{A}{2\pi}k\frac{dk}{d\varepsilon} = \frac{A}{2\pi}\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}}\ \frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(\varepsilon) = \frac{Am}{2\hbar^2}$, ανεξάρτητο του E

$\frac{\pi k_F^2}{(2\pi)^2/A} = \frac{N}{2} \Rightarrow k_F = \sqrt{2\pi\frac{N}{A}}$ έχω 1e ανά άτομο δηλ. για N=1 A ~ Å^2

άρα $k_F = \sqrt{2\pi}\ \text{Å}^{-1} \sim 1$ a.u. άρα $T_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \sim$ a.u $\sim 10^5$ K.

Θερμική ενέργεια $U_{\eta\lambda} \approx \frac{3}{2}N^* k_B T$, $N^* \approx \int_{E_F - k_BT}^{E_F + k_BT} \rho(E)\,dE \approx 2\rho(E_F)\,k_BT$

άρα $U \sim T^2$ επομένως $C_{v_{\eta\lambda}} \sim T$, όπως και στα μέταλλα.