

Όνομα, Επώνυμο και ΑΜ:

Θέμα 1: Η μέση ενέργεια, $\langle E \rangle$, ενός σωματιδίου το οποίο μπορεί να έχει ενέργειες από 0 έως E_m υπολογίζεται από την πυκνότητα καταστάσεων, $f(E)$, από τον τύπο

$$\langle E \rangle = \frac{\int_0^{E_m} E f(E) dE}{\int_0^{E_m} f(E) dE}.$$

Αποδείξτε ότι $\langle E_e \rangle = \frac{3}{5} E_F$ για ηλεκτρόνια και $\langle E_\phi \rangle = \frac{3}{4} \epsilon_D$ για φωνόνια.

Θέμα 2: Δίνονται οι ορισμοί: $U_e = N \langle E_e \rangle$, $U_\phi = \frac{3}{2} N_i \langle E_\phi \rangle$, $P_e = -\frac{\partial U_e}{\partial V}$, $P_\phi = -\frac{\partial U_\phi}{\partial V}$.

Για την ταχύτητα του ήχου, c , ισχύει ότι $\frac{\partial c}{\partial V} = -\frac{c}{V}$. Αποδείξτε ότι οι πιέσεις για ηλεκτρόνια και φωνόνια ισούνται με $P_e = \frac{2}{5} n E_F$ και $P_\phi = \frac{3}{2} n_i \epsilon_D$.

Θέμα 3: Υπολογίστε την τάξη μεγέθους της τιμής των P_e, P_ϕ σε τυπικό μέταλλο.

Θέμα 4: Υπολογίστε τις τιμές των P_e, P_ϕ στον Ag και στο Al.

Δεδομένα για τον Ag: $c_l = 3650$ m/s, $c_t = 1610$ m/s, $B=101$ GPa, $\rho_M = 10.5$ g/cm³, $\zeta = 1$, $A = 107.9$ g/mol, $E_F = 8.80 \times 10^{-19}$ J. Για το Al: $c_l = 6794$ m/s, $c_t = 3235$ m/s, $B=72.2$ GPa, $\rho_M = 2.70$ g/cm³, $\zeta = 3$, $A = 26.98$ g/mol, $E_F = 18.7 \times 10^{-19}$ J.

$1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$,	$m = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kgr}$,	$e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$,
$\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ J s}$,	$c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s (φως)}$,	$N_A = 6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$,
$\alpha_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ \AA}$,	$E_0 = \frac{\hbar^2}{ma_B^2} = 27.211 \text{ eV}$,	$T_0 = \frac{E_0}{k_B} = 315773 \text{ K}$,
$k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$	$E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$	

Λύσεις:

Θέμα 1: $\rho(E) = aE^{1/2}$ για e , $\phi(\epsilon) = b\epsilon^2$ για ϕ , όπου a, b σταθερές.

$$\langle E_e \rangle = \frac{\int_0^{E_F} E a E^{1/2} dE}{\int_0^{E_F} a E^{1/2} dE} = \frac{\int_0^{E_F} E^{3/2} dE}{\int_0^{E_F} E^{1/2} dE} = \frac{\frac{2}{5} E_F^{5/2}}{\frac{2}{3} E_F^{3/2}} = \frac{3}{5} E_F.$$

$$\langle E_\phi \rangle = \frac{\int_0^{\epsilon_D} \epsilon b \epsilon^2 d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_D} b \epsilon^2 d\epsilon} = \frac{\int_0^{\epsilon_D} \epsilon^3 d\epsilon}{\int_0^{\epsilon_D} \epsilon^2 d\epsilon} = \frac{\frac{1}{4} \epsilon_D^4}{\frac{1}{3} \epsilon_D^3} = \frac{3}{4} \epsilon_D.$$

Θέμα 2:

$$\begin{aligned} P_e &= -\frac{\partial U_e}{\partial V} = -\frac{\partial N \langle E_e \rangle}{\partial V} = -\frac{\partial N \frac{3}{5} E_F}{\partial V} = -\frac{3}{5} N \frac{\partial}{\partial V} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N/V)^{2/3}}{2m} = -\frac{3}{5} N \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N)^{2/3}}{2m} \left(-\frac{1}{3}\right) V^{-2/3} \\ &= \frac{2}{5} \frac{N}{V} \frac{\hbar^2 (3\pi^2 N/V)^{2/3}}{2m} = \frac{2}{5} n E_F. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\phi &= -\frac{\partial U_\phi}{\partial V} = -\frac{\partial \frac{3}{2} N_i \langle E_\phi \rangle}{\partial V} = -\frac{\partial \frac{3}{2} N_i \frac{3}{4} \epsilon_D}{\partial V} = -\frac{9 N_i \hbar}{8} \frac{\partial c q_D}{\partial V} = -\frac{9 N_i \hbar}{8} \left(\frac{\partial c}{\partial V} q_D + c \frac{\partial q_D}{\partial V} \right) = \\ &= -\frac{9 N_i \hbar}{8} \left(-\frac{c}{V} q_D + c \frac{\partial (6\pi^2 N_i/V)^{1/3}}{\partial V} \right) = \frac{9 N_i \hbar}{8} \left(\frac{c}{V} q_D + c \frac{1}{3} \frac{q_D}{V} \right) = \frac{9 N_i \hbar}{8} \frac{4}{3} \frac{c q_D}{V} = \frac{3}{2} n_i \epsilon_D. \end{aligned}$$

Θέμα 3: Τάξη μεγέθους: $n, n_i \sim 10^{23} \text{ cm}^{-3} = 10^{29} \text{ m}^{-3}$. $E_F \sim 10 \text{ eV} \sim 10^{-18} \text{ J}$ και $\epsilon_D \sim 10 \text{ meV} \sim 10^{-21} \text{ J}$. Άρα $P_e \sim n E_F \sim 10^{11} \text{ J/m} = 100 \text{ GPa}$ και $P_\phi \sim n_i \epsilon_D \sim 10^8 \text{ J/m} = 0.1 \text{ GPa}$.

Θέμα 4: Από $\rho_M = \frac{m}{V} = \frac{A/N_A}{1/n_i} \Rightarrow n_i = \rho_M N_A / A$ και $n = n_i \zeta \Rightarrow$

$$n_i = 5.86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, n = 5.86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \text{ (Ag) και}$$

$$n_i = 6.02 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}, n = 2.01 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} \text{ (Al).}$$

$$\frac{3}{c^3} = \frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3} \Rightarrow \frac{3}{c^3} = 5.00 \times 10^{-10} \text{ s}^3/\text{m}^3 \Rightarrow c = 1817 \text{ m/s (Ag) και } c = 3639 \text{ m/s (Al).}$$

$$q_D = (6\pi^2 n_i)^{1/3} = 1.51 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \text{ (Ag) και } q_D = 1.53 \times 10^{10} \text{ m}^{-1} \text{ (Al).}$$

$$\epsilon_D = \hbar c q_D = 2.89 \times 10^{-21} \text{ J (Ag) και } \epsilon_D = 5.84 \times 10^{-21} \text{ J (Al).}$$

$$P_e = \frac{2}{5} n E_F = 0.45.86 \times 10^{28} \text{ m}^{-3} 8.80 \times 10^{-19} \text{ J} = 20.6 \text{ GPa για τον Ag και ομοίως βρίσκω}$$

$$P_e = 15.0 \text{ GPa για το Al.}$$

$$P_\phi = \frac{3}{2} n_i \epsilon_D = 0.25 \text{ GPa (Ag) και } P_\phi = 0.53 \text{ GPa (Al).}$$