ΕΤΥ 305, 2ο διαγωνισμα, 20/10/2014

Όνομα, Επώνυμο και ΑΜ:

Θέμα 1: Η μέση τιμή του τετραγώνου της κινητικής ενέργιεας ελευθέρων ηλεκτρονίων σε ένα μέταλλο ισούται με $\langle E^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{|\mathbf{k}|<k_F} 2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 = a E_F^b$, όπου a, b είναι αδιάστατοι πραγματικοί αριθμοί και k_F, E_F ειναι ο κυματάριθμος και η ενέργεια Φέρμι του μετάλλου.

(1) Χωρίς να κάνετε πράξεις, βρείτε την τιμή του b και εκτιμήστε την μικρότερη και την μεγαλύτερη τιμή που θα μπορούσε να έχει το a. (2) Βρειτε την τιμή των a και b.

Αν λύσετε σωστά το (2) θα θεωρηθεί σωστό και το (1), ακόμα κι αν δεν το έχετε απαντήσει.

Δίνεται ότι $\int_{|\mathbf{k}|<k_F} f(k) d^3k = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{k_F} f(k) k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi = 4\pi \int_0^{k_F} f(k) k^2 dk.$

Θέμα 2: (1) Ο Fe έχει θερμοκρασία Φέρμι $T_F = 170000$ K. Βρείτε την συγκέντρωση ηλεκτρονίων, n, στον Fe.

(2) Με βάση την τιμή του n, υπολογίστε το σθένος, ζ, του Fe. Δίνεται το ατομικό βάρος $A = 55.8$ g/mol και η πυκνότητα $\rho_M = 7.86$ g/cm^3. *Υπενθυμίζεται ότι σε στερεά το σθένος ορίζεται από τον λόγο* $\zeta = \frac{N}{N_i} = \frac{n}{n_i}$ *όπου* N, n, N_i, n_i *είναι ο αριθμός και η συγκέντρωση ηλεκτρονίων και ατόμων, αντίστοιχα.*

$R = 8.3145$ J mol^{-1} K^{-1},	$m = 9.1 \times 10^{-31}$ kgr,	$e = 1.6 \times 10^{-19}$ C,
$\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s,	$c = 3.00 \times 10^8$ m/s,	$N_A = 6.022 \times 10^{23}$mol^{-1},
$k_B = 1.381 \times 10^{-23}$J K^{-1},	$k_B^{-1} = 11605$ K/eV,	$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m
$\alpha_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$ =0.529 Å,	$E_0 = \frac{\hbar^2}{ma_B^2} = 27.211$ eV,	$T_0 = \frac{E_0}{k_B} = 315773$ K,

ΕΤΥ 305, 2ο διαγωνισμα, 20/10/2014

Απαντήσεις

1.1 $b = 2$ για να έχω ίδιες μονάδες στο E^2 και E_F^b. Οι τιμές του E^2 στο άθροισμα κυμαίνοναται από 0 έως E_F^2, άρα ο μέσος όρος τους θα είναι μεταξύ αυτών των τιμών. Επομένως $0 < a < 1$ και περιμένω το a να είναι κοντά στο 1/2.

1.2

$$\begin{aligned}
\langle E^2 \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{|\mathbf{k}|<k_F} 2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^2 \\
&= \frac{1}{N} \frac{V}{8\pi^3} 2 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{k_F} k^4 k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{N} \frac{V}{8\pi^3} 2 \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right)^2 4\pi^2 \frac{k_F^7}{7} \\
&= \frac{V}{\pi^2 N} \left(\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \right)^2 k_F^3 \\
&= \frac{V}{\pi^2 N} E_F^2 3\pi^2 \frac{N}{V} \\
&= \frac{3}{7} E_F^2. \\
&\Rightarrow a = \frac{3}{7}, b = 2.
\end{aligned}$$

2

$$T_F = E_F/k_B = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2mk_B} = \frac{\hbar^2 (3\pi^2 n)^{2/3}}{2mk_B} \Rightarrow n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2mk_B T_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

και

$$\rho_M = \frac{M}{V} = \frac{N_i m_i}{V} = \frac{n_i A}{N_A} \Rightarrow n_i = \frac{\rho_M N_A}{A}.$$

επομένως

$$\zeta = \frac{n}{n_i} = \frac{A}{3\pi^2 \rho_M N_A} \left(\frac{2mk_B T_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Αριθμητικές τιμές:
$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2mk_B T_F}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 2.58 \times 10^{29} \mathrm{m}^{-3}$
$n_i = \frac{\rho_M N_A}{A} = 8.48 \times 10^{28} \mathrm{m}^{-3}$
$\zeta = n/n_i = 3.04.$